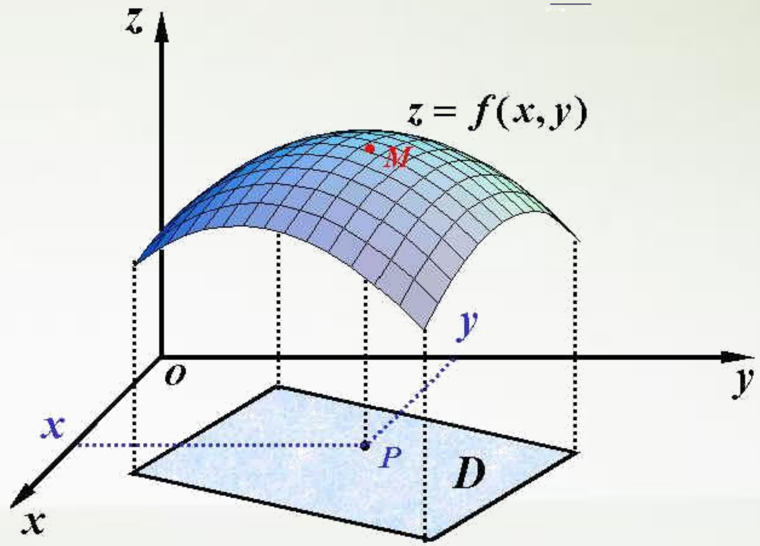
高等数学

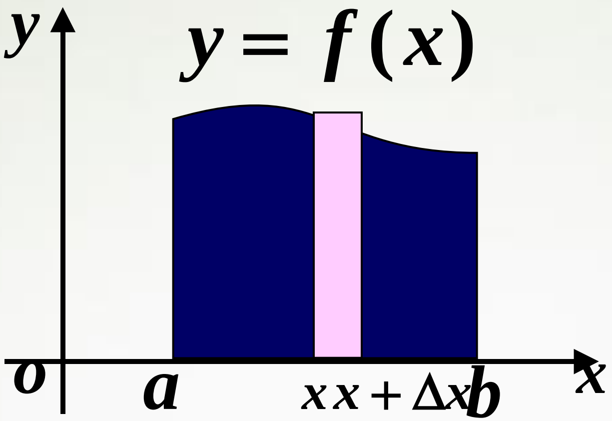


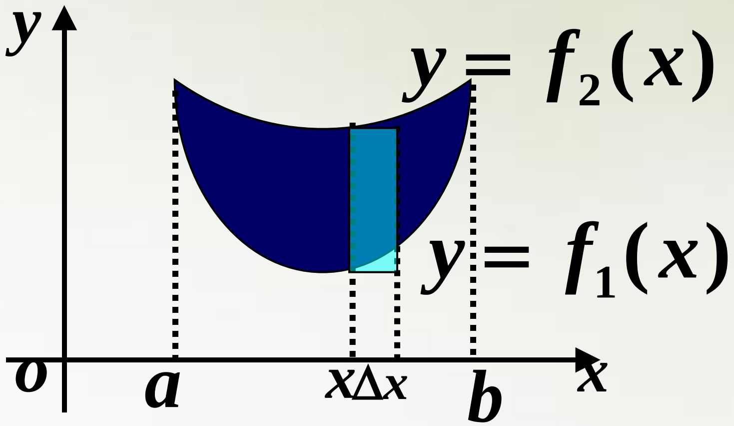
西华大学应用数学系朱雯

第二节

定积分的几何应用

一、直角坐标系情形





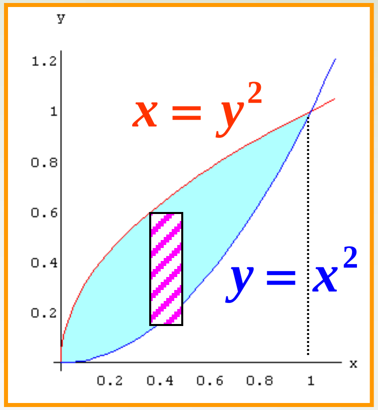
曲边梯形的面积

$$A=\int_a^b f(x)dx$$

曲边梯形的面积

$$A=\int_a^b [f_2(x)-f_1(x)]dx$$

例 1 计算由两条抛物线$y^2 = x$和$y = x^2$所围成的图形的面积.



解 两曲线的交点

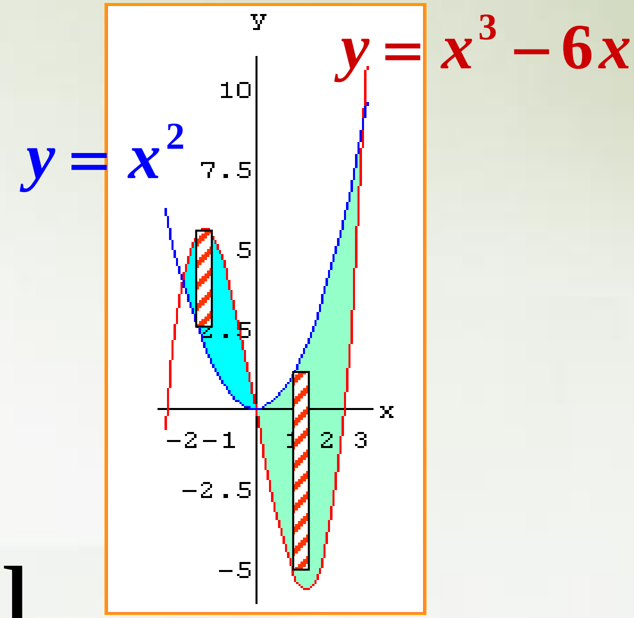
$(0,0)$ $(1,1)$

选 x 为积分变量 $x \in [0,1]$

面积元素 $dA = (\sqrt{x} - x^2)dx$

$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

例 2 计算由曲线$y = x^3 - 6x$和$y = x^2$所围成的图形的面积.



解 两曲线的交点

$$\begin{cases} y = x^3 - 6x \\ y = x^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (0,0), \quad (-2,4), \quad (3,9).$$

选 x 为积分变量 $x \in [-2, 3]$

(1) $x \in [-2, 0]$, $dA_1 = (x^3 - 6x - x^2)dx$

(2) $x \in [0,3]$, $dA_2 = (x^2 - x^3 + 6x)dx$

于是所求面积 $A = A_1 + A_2$

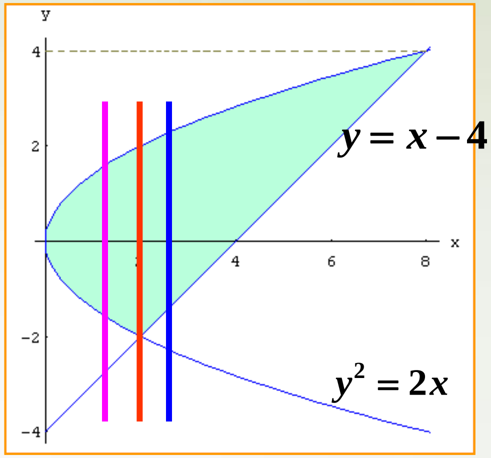
$$A = \int_{-2}^{0} (x^3 - 6x - x^2)dx + \int_{0}^{3} (x^2 - x^3 + 6x)dx$$

$$= \frac{253}{12}.$$

说明：注意各积分区间上被积函数的形式.

问题： 积分变量只能选 x 吗？

例 3 计算由曲线$y^2 = 2x$和直线$y = x - 4$所围成的图形的面积.



解 两曲线的交点

$$\begin{cases} y^2 = 2x \\ y = x - 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (2,-2),\ (8,4).$$

选 y 为积分变量 $y \in [-2, 4]$

$$dA = \left(y + 4 - \frac{y^2}{2} \right) dy \qquad A = \int_{-2}^{4} dA = 18.$$

如果曲边梯形的曲边为参数方程$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$

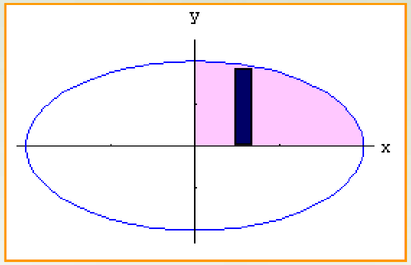
曲边梯形的面积 $A=\int_{t_1}^{t_2}\psi(t)\varphi'(t)dt.$

（其中t_1和t_2对应曲线起点与终点的参数值）

在$[t_1,t_2]$（或$[t_2,t_1]$）上$x=\varphi(t)$具有连续导数，

$y=\psi(t)$连续.

例 4 求椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$的面积.



解 椭圆的参数方程 $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$

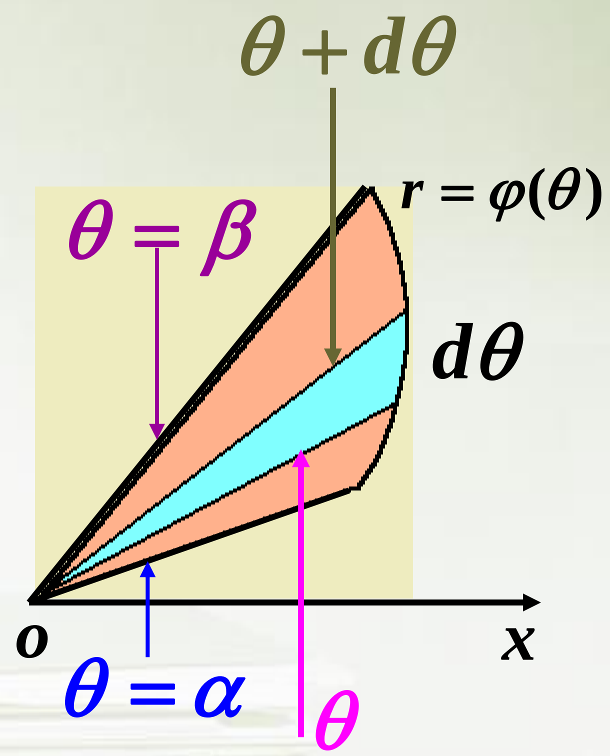
由对称性知总面积等于4倍第一象限部分面积.

$$A = 4\int_0^a y\,dx = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin t\,d(a\cos t)$$

$$= 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,dt = \pi ab.$$

二、极坐标系情形

设由曲线$r=\varphi(\theta)$及射线$\theta=\alpha$、$\theta=\beta$围成一曲边扇形，求其面积．这里，$\varphi(\theta)$在$[\alpha,\beta]$上连续，且$\varphi(\theta)\geq 0$．

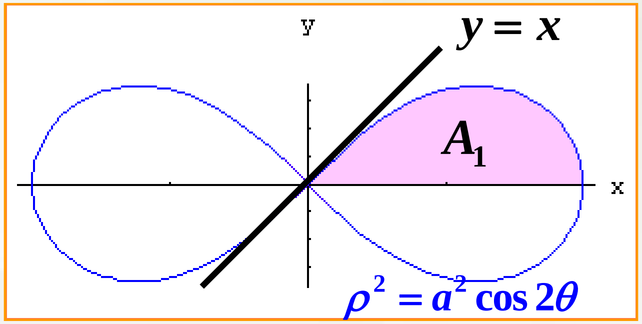


面积元素 $dA=\frac{1}{2}[\varphi(\theta)]^2 d\theta$

曲边扇形的面积 $A=\int_\alpha^\beta \frac{1}{2}[\varphi(\theta)]^2 d\theta.$

例 5　求双纽线$\rho^2 = a^2\cos 2\theta$所围平面图形的面积.

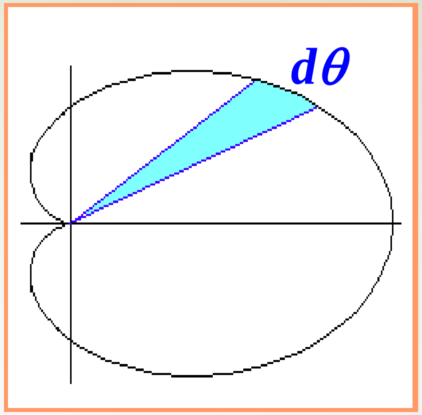
解　由对称性知总面积=4倍第一象限部分面积



$$A = 4A_1$$

$$A = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}a^2\cos 2\theta d\theta = a^2.$$

例 6 求心形线$r = a(1+\cos\theta)$所围平面图形的面积$(a>0)$.



解 $$dA = \frac{1}{2}a^2(1+\cos\theta)^2 d\theta$$

利用对称性知

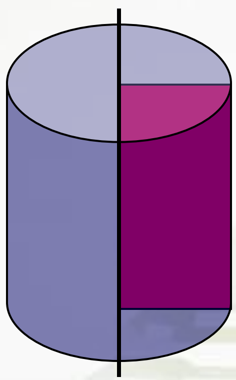
$$A = 2\cdot\frac{1}{2}a^2\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^2 d\theta$$

$$= a^2\int_0^{\pi}(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)d\theta$$

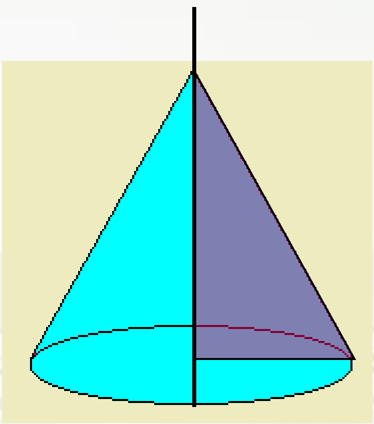
$$= a^2\left[\frac{3}{2}\theta+2\sin\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{\pi} = \frac{3}{2}\pi a^2.$$

三、旋转体的体积

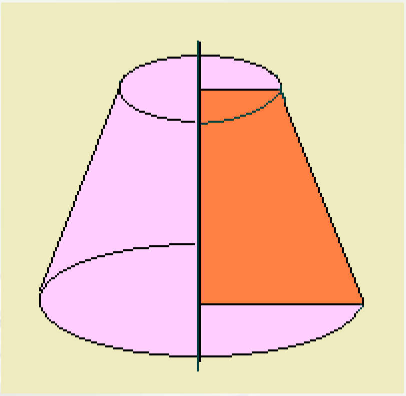
旋转体就是由一个平面图形饶这平面内一条直线旋转一周而成的立体．这直线叫做**旋转轴**.



圆柱



圆锥

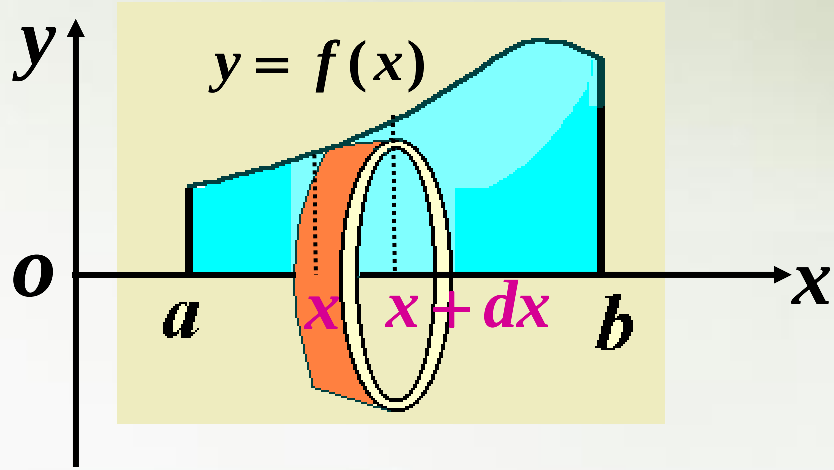


圆台

一般地，如果旋转体是由连续曲线$y=f(x)$、直线$x=a$、$x=b$及x轴所围成的曲边梯形绕x轴旋转一周而成的立体，体积为多少？

取积分变量为x，$x\in[a,b]$

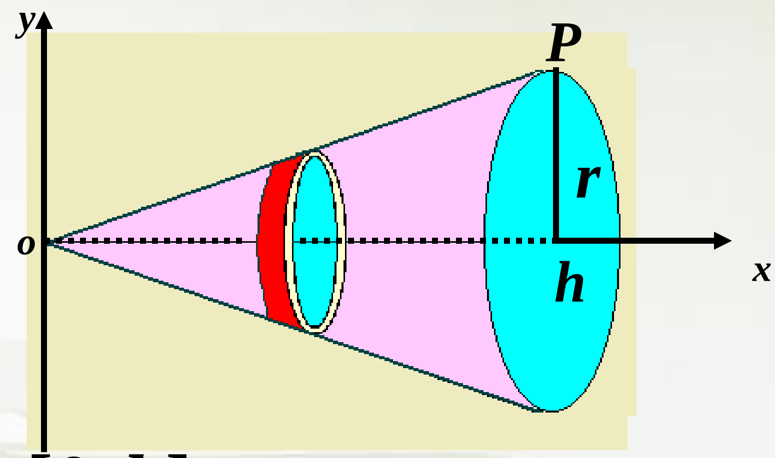
在$[a,b]$上任取小区间$[x,x+dx]$，



取以dx为底的窄边梯形绕x轴旋转而成的薄片的体积为体积元素，$dV=\pi[f(x)]^2dx$

旋转体的体积为 $\boxed{V=\int_a^b \pi[f(x)]^2dx}$

例 1 连接坐标原点O 及点$P(h,r)$的直线、直线$x=h$及x轴围成一个直角三角形．将它绕x 轴旋转构成一个底半径为r 、高为h 的圆锥体，计算圆锥体的体积.



解 直线 OP方程为

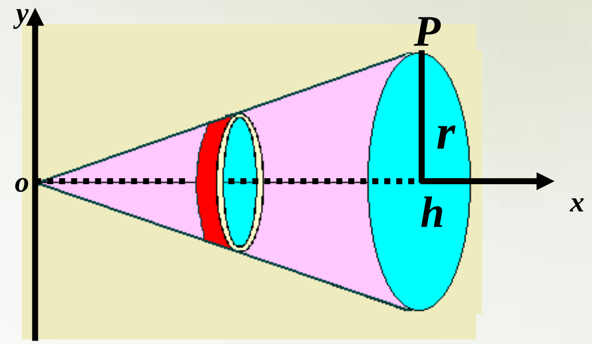
$$y=\frac{r}{h}x$$

取积分变量为x， $x\in[0,h]$

在$[0,h]$上任取小区间$[x,x+dx]$，

以dx为底的窄边梯形绕x轴旋转而成的薄片的体积为

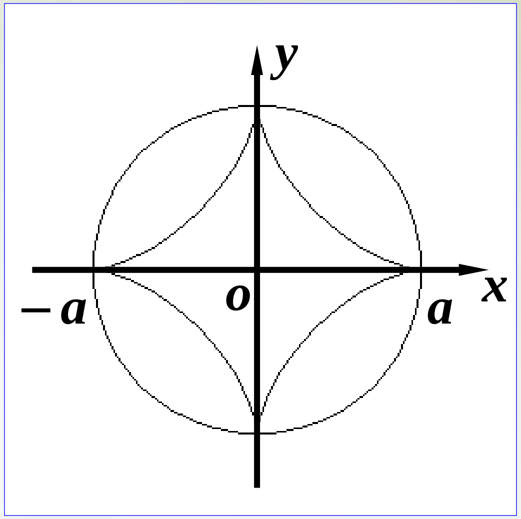
$$dV=\pi\left[\frac{r}{h}x\right]^2dx$$



圆锥体的体积

$$V=\int_0^h\pi\left(\frac{r}{h}x\right)^2dx=\frac{\pi r^2}{h^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h=\frac{\pi hr^2}{3}.$$

例2 求星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}(a>0)$ 绕 轴旋转构成旋转体的体积.



解 $\because y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}},$

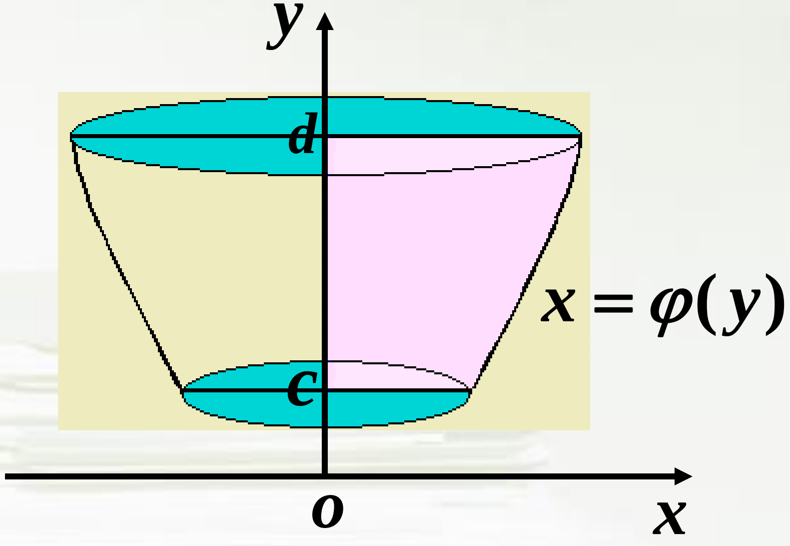
$$\therefore y^2=\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^3 \quad x\in[-a,a]$$

旋转体的体积

$$V=\int_{-a}^{a}\pi\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^3dx=\frac{32}{105}\pi a^3.$$

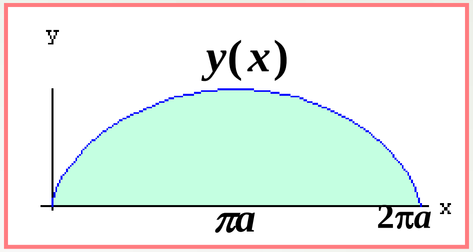
类似地，如果旋转体是由连续曲线 $x=\varphi(y)$、直线 $y=c$、$y=d$ 及 y 轴所围成的曲边梯形绕 y 轴旋转一周而成的立体，体积为

$$V=\int_c^d \pi[\varphi(y)]^2 dy$$



例 3 求摆线 $x=a(t-\sin t)$， $y=a(1-\cos t)$ 的一拱与 $y=0$ 所围成的图形分别绕 x 轴、y 轴旋转构成旋转体的体积.

解 绕 x 轴旋转的旋转体体积

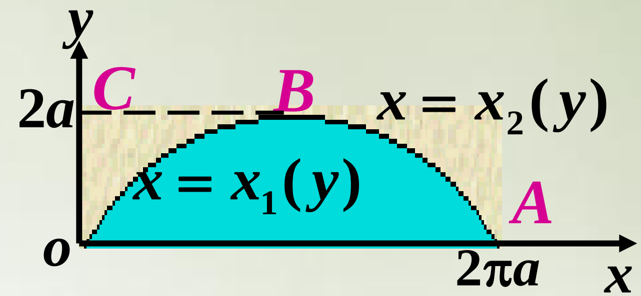


$$V_x=\int_0^{2\pi a}\pi y^2(x)dx$$

$$=\pi\int_0^{2\pi}a^2(1-\cos t)^2\cdot a(1-\cos t)dt$$

$$=\pi a^3\int_0^{2\pi}(1-3\cos t+3\cos^2 t-\cos^3 t)dt=5\pi^2a^3.$$

绕y轴旋转的旋转体体积



可看作平面图$OABC$ 与OBC

分别绕y 轴旋转构成旋转体的体积之差.

$$V_y = \int_0^{2a} \pi x_2^2(y)dt - \int_0^{2a} \pi x_1^2(y)dt$$

$$= \pi \int_{2\pi}^{\pi} a^2(t - \sin t)^2 \cdot a \sin t dt$$

$$- \pi \int_0^{\pi} a^2(t - \sin t)^2 \cdot a \sin t dt$$

$$= \pi a^3 \int_0^{2\pi} (t - \sin t)^2 \sin t dt = 6\pi^3 a^3.$$

补充 如果旋转体是由连续曲线$y = f(x)$、直线$x = a$、$x = b$及x轴所围成的曲边梯形绕y轴旋转一周而成的立体，体积为

$$V_y = 2\pi\int_a^b x\,|\,f(x)\,|\,dx$$

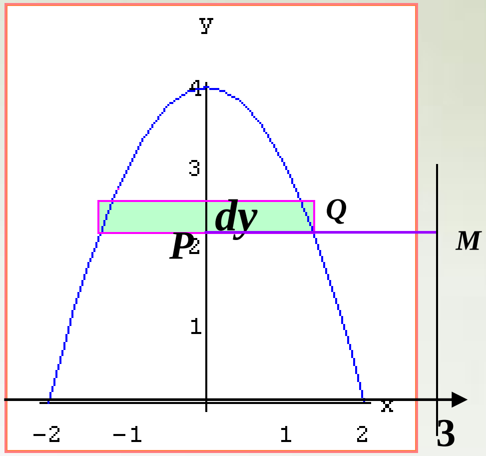
利用这个公式，可知上例中

$$V_y = 2\pi\int_0^{2\pi a} x\,|\,f(x)\,|\,dx$$

$$= 2\pi\int_0^{2\pi} a(t-\sin t)\cdot a(1-\cos t)d[a(t-\sin t)]$$

$$= 2\pi a^3\int_0^{2\pi}(t-\sin t)(1-\cos t)^2 dt = 6\pi^3 a^3.$$

例 4 求由曲线 $y=4-x^2$ 及 $y=0$ 所围成的图形绕直线 $x=3$ 旋转构成旋转体的体积.



解 取积分变量为 y, $y\in[0,4]$

体积元素为

$$dV=[\pi\overline{PM}^2-\pi\overline{QM}^2]dy$$

$$=[\pi(3+\sqrt{4-y})^2-\pi(3-\sqrt{4-y})^2]dy$$

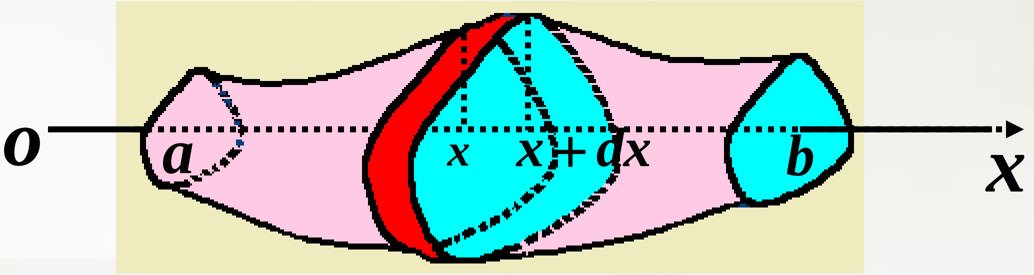
$$=12\pi\sqrt{4-y}dy,$$

$$\therefore V=12\pi\int_0^4\sqrt{4-y}dy=64\pi.$$

二、平行截面面积为已知的立体的体积

如果一个立体不是旋转体，但却知道该立体上垂直于一定轴的各个截面面积，那么，这个立体的体积也可用定积分来计算.

$A(x)$表示过点 x 且垂直于x 轴的截面面积，

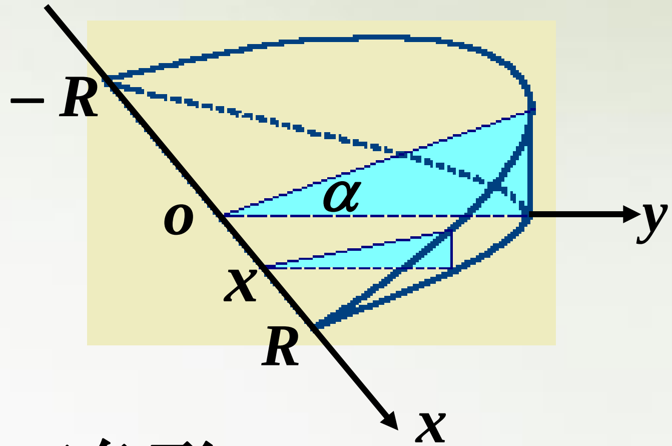


$A(x)$为x 的已知连续函数

$dV = A(x)dx$，　　立体体积 $V = \int_a^b A(x)dx.$

例 5 一平面经过半径为R 的圆柱体的底圆中心，并与底面交成角α，计算这平面截圆柱体所得立体的体积.

解 取坐标系如图



底圆方程为

$$x^2+y^2=R^2$$

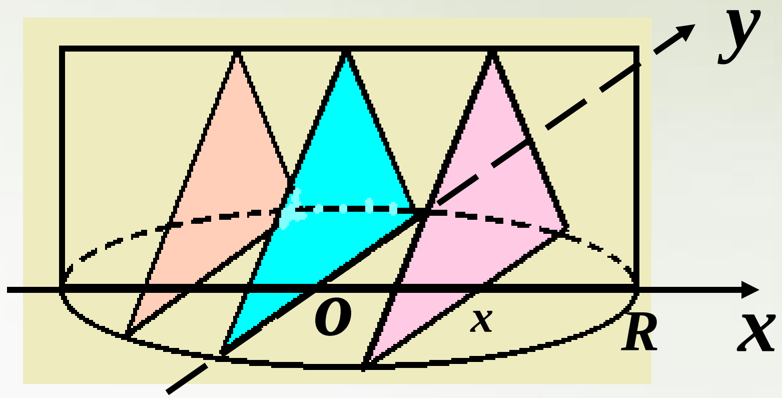
垂直于x 轴的截面为直角三角形

截面面积 $A(x)=\frac{1}{2}(R^2-x^2)\tan\alpha,$

立体体积 $V=\frac{1}{2}\int_{-R}^{R}(R^2-x^2)\tan\alpha dx=\frac{2}{3}R^3\tan\alpha.$

例 6　求以半径为R的圆为底、平行且等于底圆直径的线段为顶、高为h的正劈锥体的体积.

解　取坐标系如图



底圆方程为

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

垂直于x轴的截面为等腰三角形

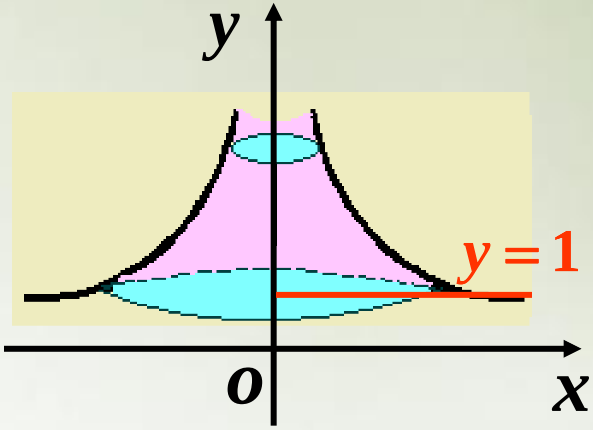
截面面积 $A(x) = h \cdot y = h\sqrt{R^2 - x^2}$

立体体积 $V = h\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2} dx = \frac{1}{2}\pi R^2 h.$

思考题

求曲线$xy=4$，$y\geq 1$，$x>0$所围成的图形绕y轴旋转构成旋转体的体积.

思考题解答



$$\begin{cases} xy = 4 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{交点 } (4,1),$$

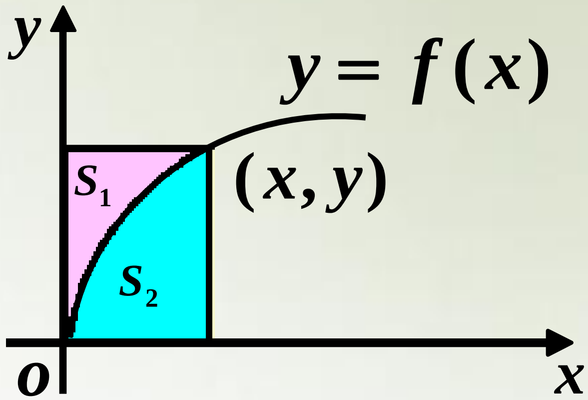
立体体积 $V_y = \pi\int_1^{+\infty} x^2 dy$

$$= \pi\int_1^{+\infty} \frac{16}{y^2} dy = \pi\left[-\frac{16}{y}\right]_1^{+\infty} = 16\pi.$$

思考题

设曲线$y = f(x)$过原点及点(2,3)，且$f(x)$为单调函数，并具有连续导数，今在曲线上任取一点作两坐标轴的平行线，其中一条平行线与x轴和曲线$y = f(x)$围成的面积是另一条平行线与y轴和曲线$y = f(x)$围成的面积的两倍，求曲线方程.

思考题解答



$$S_2 = 2S_1$$

$$\because S_2 = \int_0^x f(x)dx$$

$$S_1 = xy - S_2 = xy - \int_0^x f(x)dx$$

$$\therefore \int_0^x f(x)dx = 2[xy - \int_0^x f(x)dx]$$

$$\Rightarrow 3\int_0^x f(x)dx = 2xy,$$ 两边同时对x求导

$$3f(x)=2y+2xy' \Rightarrow 2xy'=y$$

积分得 $y^2=cx,$

因为曲线 $y=f(x)$ 过点 $(2,3)$ $\Rightarrow c=\dfrac{9}{2}$

$\therefore y^2=\dfrac{9}{2}x,$ 因为 $f(x)$ 为单调函数

所以所求曲线为 $y=\dfrac{3}{2}\sqrt{2x}.$